МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для виконання контрольної роботи з курсу

«ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»

(для студентів 2 курсу ФПО та ЗН та слухачів другої вищої освіти напряму підготовки 0921 (6.060101) «Будівництво» спеціальності «Теплогазопостачання і вентиляція»)

Харків ХНАМГ 2007

Методичні вказівки для виконання контрольної роботи з курсу «Теорія ймовірностей і математична статистика (для студентів 2 курсу ФПО та ЗН та слухачів другої вищої освіти напряму підготовки 0921 (6.060101) «Будівництво» спеціальності «Теплогазопостачання і вентиляція») / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: Т. Б. Воронкова, В. М. Охріменко. – Х.: ХНАМГ, 2007. – 31 с.

Укладачі: Т. Б. Воронкова,
В. М. Охріменко

Рекомендовано кафедрою Інформаційних систем і технологій у міському господарстві,

протокол № 41 від 23.10.07 р.

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Вивчення дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика» передбачено програмою підготовки бакалавра за напрямком «Будівництво». Теорією ймовірностей називається розділ математики, що вивчає закономірності у випадкових явищах. Методи теорії ймовірностей широко використовуються в різних практичних задачах техніки, економіки, планування виробництва й інших. Теорія ймовірностей є теоретичною основою математичної статистики. У результаті вивчення курсу студент повинен володіти основними методами статистичного опису результатів спостереження, визначення імовірнісних характеристик випадкових величин, перевірки статистичних гіпотез і прийняття на їхній основі обґрунтованих рішень.

У процесі вивчення предмета «Теорія ймовірностей і математична статистика» студент повинен виконати контрольну роботу, що включає 7 завдань, які належать до різних тем курсу. У методичних вказівках наведені основні формули й теоретичні положення, а також розглянуті приклади вирішення задач.

Номер варіанта контрольного завдання вибирається за двома останніми цифрами номера залікової книжки. Усього варіантів - 15. Якщо дві останні цифри залікової книжки перевищують число 15, то номер варіанта визначається шляхом вирахування числа, кратного 15, від 15 до 90. Наприклад, номеру залікової книжки, що закінчується цифрами 86, відповідає варіант 11. Контрольна робота повинна бути виконана в строки, передбачені навчальним графіком. У процесі виконання завдання необхідно приводити відповідні пояснення. Наприкінці роботи слід привести список літератури, яку студент використовував при виконанні контрольної роботи.

На титульному аркуші необхідно чітко написати назву дисципліни, варіант завдання, прізвище, ім'я та по батькові, вказати курс, спеціальність і факультет.

ПРОГРАМА КУРСУ

Тема 1. ЙМОВІРНІСТЬ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ. Основні поняття теорії ймовірностей. Класичний і статистичний методи визначення імовірності випадкової події. Закон великих чисел. Операції над подіями. Теореми теорії ймовірностей. Формула повної ймовірності. Формула Бейеса. Повторні незалежні випробування, формула Бернуллі. Локальна й інтегральна теореми Лапласа. Формула Пуассона.

Тема 2. ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА І ЇЇ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ. Поняття випадкової величини. Закон розподілу випадкової величини. Функція розподілу й щільність розподілу ймовірностей і їхні властивості. Числові характеристики випадкової величини. Моменти випадкової величини: початкові й центральні. Теореми про числові характеристики.

Тема 3. СИСТЕМА ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ Й ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМИ. Поняття системи випадкових величин. Система двох випадкових величин. Функція розподілу й щільність розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин. Числові характеристики системи, кореляційний момент і коефіцієнт кореляції. Функції випадкових величин.

Тема 4. ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. Біноміальний закон розподілу. Закон розподілу Пуассона. Експонентний закон розподілу. Нормальний закон розподілу. Центральна гранична теорема. Логарифмічно нормальний розподіл. Закон рівномірної щільності.

Тема 5. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ. Поняття генеральної й вибіркової сукупностей. Визначення закону розподілу випадкової величини за статистичним даними. Вирівнювання статистичних рядів. Оцінки числових характеристик випадкових величин і їхні властивості. Довірчий інтервал і довірча ймовірність. Статистичні гіпотези. Нульова й альтернативна гіпотези. Область прийняття гіпотези. Критерії згоди.

Тема 6. ЕЛЕМЕНТИ РЕГРЕСІЙНОГО АНАЛІЗУ. Функція регресії. Згладжування експериментальних залежностей за методом найменших квадратів. Перевірка адекватності рівняння регресії за критерієм Фішера. Оцінка значимості коефіцієнтів рівняння регресії.

Тема 7. ЕЛЕМЕНТИ КОРЕЛЯЦІЙНОГО АНАЛІЗУ. Кореляційна залежність. Визначення тісноти зв'язку в кореляційній залежності. Коефіцієнт регресії.

Тема 8. ЕЛЕМЕНТИ ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ. Однофакторний дисперсійний аналіз. Мінливість середніх. Критерій z.

Тема 9. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ. Визначення випадкового процесу, імовірнісні характеристики. Стаціонарний випадковий процес. Ергодична гіпотеза. Кореляційна функція.

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ

Завдання 1 варто виконувати після вивчення теми «Ймовірність випадкової події». Для розв'язання задач варто використовувати класичний метод визначення ймовірності випадкової події

$$P(A)= m/n \,, \tag{1}$$

де n – загальне число можливих наслідків досліду; m – число наслідків досліду, які сприятливі появі події А;

а також теореми додавання й множення:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A*B), \tag{2}$$

$$P(A + B) = P(A) + P(B), \tag{3}$$

$$P(A) = 1 - P((A),$$

$$P(A * B) = P(A) * P(B|A); \tag{4}$$

формулу повної ймовірності:

$$P(A)= P(H_1)*P(A|H_1)+P(H_2)*P(A|H_2)+ \dots +P(H_N)*P(A|H_N); \tag{5}$$

формулу Бейеса

$$P(H_i|A)= P(H_i)*P(A|H_i) /\Sigma P(H_i)*P(A|H_i); \tag{6}$$

формулу Бернуллі

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m} \tag{7}$$

де $P_n(m)$ - ймовірність того, що в n випробуваннях подія A з'явиться рівно m разів;

C_n^m - число сполучень з n елементів до m;

p – імовірність появи події A в одному досліді;

$q = 1 – p$ – імовірність не появи події A в одному досліді.

Приклад 1. Три спортсмени стріляють по мішені по одному разу. Імовірність влучення для першого з них дорівнює 0,8; для другого - 0,85; для третього - 0,9. Визначити ймовірність того, що:

1) всі спортсмени влучать в мішень;
2) жоден не влучить;
3) тільки один спортсмен влучить в мішень;
4) тільки два спортсмени влучать в мішень;
5) хоча б один спортсмен влучить в мішень.

Рішення. Позначимо події A_1, A_2, A_3 — перший, другий, третій спортсмени відповідно влучать в мішень. Тоді

$P(A_1)$=0,8; $P(\overline{A_1})$=0,2;

$P(A_2)$=0,85; $P(\overline{A_2})$=0,15;

$P(A_3)$=0,9; $P(\overline{A_3})$=0,1.

1) Ймовірність того, що всі спортсмени влучать в мішень і знаходимо за теоремою множення ймовірностей для незалежних подій.

$$P(A_1*A_2*A_3)= 0,8 * 0,85 * 0,9 =0,612.$$

2) Ймовірність того, що жоден із спортсменів не влучить в мішень знаходимо за теоремою множення для незалежних подій

$P(\bar{A}_1 * \bar{A}_2 * \bar{A}_3) = 0,2 * 0,15 * 0,1 = 0,003.$

3) Для обчислення ймовірності того, що тільки один спортсмен влучить в мішень, використаємо теореми додавання для неспільних подій і множення для незалежних подій:

$$p = P(A_1)*P(\bar{A}_2)*P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)*P(A_2)*P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)*P(\bar{A}_2)*P(A_3) =$$
$$= 0,8*0,15*0,1+0,2*0,85*0,1+0,2*0,15*0,9 = 0,056.$$

4) Для обчислення ймовірності того, що тільки два спортсмени потраплять в мішень також використаємо теореми додавання для неспільних подій і множення для незалежних подій:

$$p = P(A_1)*P(A_2)*P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)*P(A_2)*P(A_3)+P(A_1)*P(\bar{A}_2)*P(A_3) =$$
$$= 0,8*0,85*0,1+0,2*0,85*0,9+ 0,8*0,15*0,9 = 0,329.$$

5) Подія "хоча б один із спортсменів влучить в мішень" протилежна події "жоден із спортсменів не влучить в мішень". Таким чином, маємо

$p = 1 - P(\bar{A}_1 * \bar{A}_2 * \bar{A}_3) = 1 - 0,003 = 0,997.$

Приклад 2. У складальний цех надходять однакові деталі, що виробляють у двох інших цехах заводу. Перший цех доставляє 70%, а другий - 30% деталей. При цьому перший цех виробляє 95% деталей вищої якості, а другий - 90%. Навмання обрана деталь виявилася вищої якості. Знайти ймовірність того, що ця деталь: 1) з першого цеху; 2) із другого цеху.

Рішення. Позначимо подію A - деталь вищої якості. Висуваємо гіпотези: гіпотеза H_1 - деталь із першого цеху; гіпотеза H_2 - деталь із другого цеху. Тоді апріорні ймовірності гіпотез: $P(H_1) = 0,7$, $P(H_2) = 0,3$. Умовні ймовірності події A при кожній з гіпотез відповідно дорівнюють: $P(A/H_1) = 0,95$, $P(A/H_2) = 0,9$. За формулою Бейеса маємо:

імовірність того, що деталь із першого цеху -

$$P(H_1/A) = P(H_1)*P(A/H_1) / [P(H_1)*P(A/H_1)+P(H_2)*P(A/H_2)] =$$
$$= 0,7*0,95/(0,7*0,95+0,3*0,9) = 0,71;$$

імовірність того, що деталь із другого цеху -

$$P(H_2/A) = P(H_2)*P(A/H_2) / [P(H_1)*P(A/H_1)+P(H_2)*P(A/H_2)] =$$
$$= 0,3*0,9/(0,7*0,95+0,3*0,9) = 0,29.$$

Завдання 2 і 3 варто виконувати після вивчення теми «Випадкова величина і її закони розподілу». Нагадаємо основні положення.

Випадковою називають величину, що в результаті досліду може прийняти те або інше значення. Розрізняють *дискретні* й *безперервні* випадкові величини.

Законом розподілу випадкової величини називають будь-яке правило, що дозволяє знаходити ймовірності різних значень випадкової величини.

Ряд розподілу - таблиця, у верхньому рядку якої перераховано всі значення випадкової величини $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у порядку їхнього зростання, а в нижньому - імовірності появи цих значень $p_1, p_2, \ldots, p_n$:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Функція розподілу випадкової величини X - це ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, менше x:

$F(x) = P\{X \leq x\}$ (8)

Властивості:

1. Значення функції розподілу належать відрізкові $[0; 1]$.
2. Функція розподілу - неубутна функція, тобто

$F(x_2) \geq F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

3. Імовірність того, що випадкова величина X прийме значення, укладене в інтервалі (α, β), дорівнює приростові функції розподілу на цьому інтервалі:

$P\{\alpha \leq X \leq \}= F(\beta) - F(\alpha)$.

4. Якщо всі можливі значення випадкової величини X належать інтервалові (- ∞, + ∞), то при мінус нескінченності функція розподілу дорівнює нулю, а при плюс нескінченності — одиниці, тобто $F(-\infty) = 0; F(+\infty) = 1$.

Щільність розподілу – це похідна від $F(x)$ по x :

$$f(x) = d(x) / dx. \tag{9}$$

Властивості:

1. Щільність розподілу невід'ємна, тобто $f(x) \geq 0$ як похідна неубутної функції.
2. Інтеграл від щільності розподілу в нескінченних межах дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \tag{10}$$

3. Ймовірність влучення безперервної випадкової величини в інтервал (α, β)

$$P\{\alpha \leq X \leq \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \tag{11}$$

4. Функцію розподілу визначають співвідношенням:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{12}$$

Числові характеристики випадкової величини:

математичне сподівання Х:

$$m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i; \tag{13}$$

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx; \tag{14}$$

другий початковий момент α_2:

$$\alpha_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i \,; \tag{15}$$

$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \,; \tag{16}$$

дисперсія

$$D_x = \sum_{i=1}^{n} \overset{0}{x}{}_i^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i \,; \tag{17}$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{0}{x}{}^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx \,, \tag{18}$$

де $\overset{0}{X} = X - m_x$;

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2.$$

середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}. \tag{19}$$

Приклад 3. Задано ряд розподілу

x_i	*1,4*	*1,8*	*2,3*	*3,2*
p_i	*0,3*	*0,4*	*0,2*	*0,1*

Знайти математичне сподівання $M[X]$, дисперсію $D[X]$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma[X]$.

Рішення: Математичне сподівання випадкової величини X

$$M[X] = x_1 * p_1 + x_2 * p_2 + x_3 * p_3 + x_4 * p_4 =$$
$$= 1{,}4 * 0{,}3 + 1{,}8 * 0{,}4 + 2{,}3 * 0{,}2 + 3{,}2 * 0{,}1 = 1{,}92.$$

Дисперсія

$$D[X] = (x_1 - M[X])^2 * p_1 + (x_2 - M[X])^2 * p_2 + (x_3 - M[X])^2\, p_3 + (x_4 * - M[X])^2 p_4 =$$
$$= (1{,}4-1{,}92)^2 * 0{,}3 + (1{,}8 - 1{,}92)^2 * 0{,}4 + (2{,}3-1{,}92)^2 * 0{,}2 + (3{,}2-1{,}92)^2 * 0{,}1 =$$
$$= 0{,}28.$$

або $M[X^2] = 1{,}4^2 * 0{,}3 + 1{,}8^2 * 0{,}4 + 2{,}3^2 * 0{,}2 + 3{,}2^2 * 0{,}1 = 3{,}966$;

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = 3{,}966 - 1{,}92^2 = 0{,}28.$$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини X:

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{0{,}28} = 0{,}53.$$

Приклад 4. Випадкову величину *X* задано функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ x^2 / 4, 0 < x \le 2 \\ 1, x > 2 \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, визначити математичне сподівання, дисперсію, побудувати графіки функцій *f(x)* і *F(x)*.

Рішення:

а) знайдемо щільність ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ x / 2, 0 < x \le 2 \\ 0, x > 2 \end{cases}$$

б) визначимо математичне сподівання X:

$$M[X] = \int_0^2 x * x / 2dx = 1/2\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = 4/3$$

знайдемо дисперсію *X:*

$$D[X] = \int_0^2 x^2 * x / 2dx - (4/3)^2 = 1/2\int_0^2 x^3 dx - (4/3)^2 = \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} \Big|_0^2 - (4/3)^2 = 2/9.$$

в) побудуємо графіки функцій *f(x)* і *F(x)*.

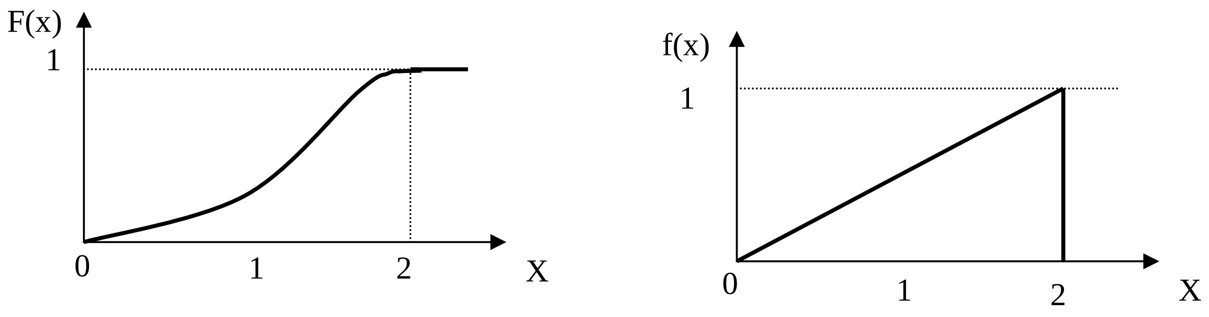

Рис. 1

Завдання 4 варто виконувати після вивчення теми «Основні закони розподілу випадкових величин».

Біноміальний закон розподілу

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{20}$$

де $0 < p < 1$; $q = 1 - p$.

Закон розподілу Пуассона

$$P_n(m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a}. \tag{21}$$

Експонентний закон розподілу

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \tag{22}$$

щільність розподілу T

$$f(t) = d(t)/dt = \lambda e^{-\lambda t}, \tag{23}$$

де λ – параметр розподілу (середнє число подій в одиницю часу).
Нормальний закон розподілу ймовірностей

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}exp\left\{\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}. \tag{24}$$

Для визначення ймовірностей, пов'язаних з нормально розподіленою випадковою величиною користуються функцією Лапласа:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \tag{25}$$

значення якої протабульовані й наведені в додатку 2.

Ймовірність влучення випадкової величини X на ділянку значень (α,β) виражають через функцію Лапласа формулою

$$P\{\alpha < X < \beta\}=\Phi\left(\frac{\beta-m_x}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m_x}{\sigma}\right). \tag{26}$$

Закон рівномірної щільності

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta - \alpha} & при \quad x\in(\alpha,\beta); \\ 0 & при \quad x\notin(\alpha,\beta)\end{cases}. \tag{27}$$

Приклад 5. Відомі імовірнісні характеристики нормально розподіленої випадкової величини X: $m=17$; $\sigma=0,6$. Знайти ймовірність події $P(\alpha<X<\beta)$, а також імовірність того, що $P(|x\text{-}m| < \delta)$, якщо $\alpha=16,8$; $\beta=17,2$; $\delta=0,3$.

Рішення:

Обчислимо ймовірність того, що X належить інтервалу $(16,8;\ 17,2)$.

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{17,2-17}{0,6}\right)-\Phi\left(\frac{16,8-17}{0,6}\right)=\Phi\left(\frac{1}{3}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{3}\right)=2*\Phi\left(\frac{1}{3}\right)=0,26.$$

Визначимо ймовірність того, що x відхилиться від свого середнього значення m менше чим на δ

$$P(|x-17|<0,3)=2*\Phi\left(\frac{0,3}{0,6}\right)=0,38.$$

Завдання 5 і 6 варто виконувати після вивчення теми «Елементи математичної статистики». Нагадаємо основні положення й визначення.

Генеральною сукупністю називають сукупність об'єктів, з яких проводять вибірку.

Вибірковою сукупністю, або просто *вибіркою,* називають сукупність випадково відібраних об'єктів.

Обсягом сукупності (вибіркової або генеральної) називають число об'єктів цієї сукупності.

Варіантою називають кожне окреме значення досліджуваної ознаки

$$x_1, x_2, \ldots, x_n\ldots$$

Частотою називають число, що показує, скільки разів зустрічається та або інша варіанта. Частоти позначають відповідно $m_1, m_2, \ldots, m_n\ldots$

Варіаційний ряд являє собою таблицю, в одному рядку якої розташовують варіанти в зростаючому або убутному порядку, а в іншій — відповідні їм частоти.

Однією з найважливіших характеристик варіаційного ряду є середня величина. *Середню арифметичну* визначають за формулами

незважена

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \qquad (28)$$

зважена

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \qquad (29)$$

Дисперсію незважену і зважену обчислюють за формулами

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}; \qquad D = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \qquad (30)$$

Середнє квадратичне відхилення визначається як квадратний корінь з дисперсії

$$\sigma = \sqrt{D}. \qquad (31)$$

Оцінки числових характеристик випадкових величин і їхні властивості.

З n дослідів оцінку математичного сподівання можна визначити як середнє арифметичне значення *X.*

$$\bar{x} = \frac{1}{n} * \sum x_i, \qquad (33)$$

де *1/n* - імовірність появи значення x_i у кожному з n дослідів, якщо всі значення X різні.

$$\frac{1}{n} = p^* . \qquad (34)$$

Оцінка математичного сподівання, отримана за формулою (33), є лінійною функцією n незалежних випадкових величин x_i, тому вона сама є випадковою величиною, а отже має свої числові характеристики: математичне сподівання й дисперсію

$$\mathrm{M}[\mathrm{m}_x^*] = m_x ; \qquad (35)$$

$$\mathrm{D}[\mathrm{m}_x^*] = \frac{D[X]}{n} . \qquad (36)$$

Інші оцінки числових характеристик визначають за формулами

$$\mathrm{D}_x^* = \frac{\sum (x_i - m_x^*)^2}{n-1} ; \qquad (37)$$

$$\mathrm{K}_{xy}^* = \frac{\sum (x_i - m_x^*)(y_i - m_y^*)}{n-1} . \qquad (38)$$

Довірчий інтервал і довірча ймовірність.

Нехай для оцінки математичного сподівання m_x^* потрібно визначити можливу помилку l. Призначають досить велику ймовірність β таку, що подію з цією ймовірністю можна вважати практично достовірною. β - імовірність того, що помилка не перевищує $\pm\, l$, для неї справедлива рівність

$$P\{/m_x - m_x^*/ < l\} = \beta. \qquad (39)$$

Більші за абсолютним значенням помилки, чим $\pm\, l$, будуть зустрічатися з імовірністю

$$\alpha = 1 - \beta.$$

Перепишемо (39) у вигляді

$$P\{\, (m_x^* - l) < m_x < (m_x^* + l)\} = \beta. \qquad (40)$$

Рівність (40) означає, що з імовірністю β невідоме значення параметра m_x буде перебувати в інтервалі $L=[m_x^*- l,\ m_x^* + l]$.

Таким чином, значення β і L характеризують ступінь упевненості й величину погрішності при визначенні дійсного значення шуканого параметра $\mathrm{m_x}$. При цьому величину β називають довірчою ймовірністю, а величину L - довірчим інтервалом.

Приклад 6. Випадкову величину X нормально розподілено з відомим середнім квадратичним відхиленням σ, вибірковим середнім $\overline{x_B}$, обсягом вибірки n. Знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання m генеральної сукупності з довірчою ймовірністю β , якщо $\sigma = 4;$ $\overline{x_B} = 15{,}6;\ n = 64;\ \beta = 0{,}95.$

Рішення: Для визначення довірчого інтервалу використовуємо формулу

$$P(|\ \overline{x_B} - m| < \delta) = \beta = 2^*\Phi(\delta^* \sqrt{n}\,/\sigma).$$

Довірчий інтервал знаходимо у вигляді $\overline{x}_B-\delta<m<\overline{x}_B+\delta$.

За умовою $2*\Phi(\delta*\sqrt{n}/\sigma)=0,95$, звідки $\Phi(\delta*\sqrt{n}/\sigma)=0,475$. З таблиці значень функції Лапласа $\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{t^2}{2}}dx$ знаходимо $(\delta*\sqrt{n}/\sigma)=1,96$;

Тоді, $\delta=1,96*4/\sqrt{64}=0,98$.

Довірчий інтервал для оцінки m, що відповідає довірчої ймовірності $\beta=0,95$:

$$15,6-0,98<m<15,6+0,98$$

або

$$14,62<m<16,58.$$

Приклад 7. За заданим статистичним розподілом вибірки

x_i	10	15	20	25	30
m_i	6	16	50	24	4

знайти вибіркову середню $\overline{x}_B$, дисперсію D_B, середнє квадратичне відхилення σ_B.

Рішення: Значення вибіркових середньої, дисперсії, середнього квадратичного відхилення можна знайти за формулами

$$\overline{x}_в=\frac{\sum\limits_{i=1} m_i x_i}{n}; \qquad D_в=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} m_i x_i^2}{n}-\overline{x}_в^{\,2}; \qquad \sigma_B=\sqrt{D_B},$$

де n - обсяг вибірки , $n=\Sigma m_i$.

Для спрощення обчислень введемо умовну варіанту

$$x_i'=(x_i-a)/\Delta x,$$

де a – варіанта з найбільшою частотою m_i; Δx - крок варіювання:

$$\Delta x=x_{i+1}-x_i.$$

За допомогою умовної варіанти знаходимо x_B і D_B за формулами

$$\overline{x}_в'=\frac{\sum\limits_{i=1} m_i x_i'}{n}; \qquad D_в'=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} m_i (x_i')^2}{n}-(\overline{x}_в')^2.$$

Шукані значення вибіркових середньої й дисперсії визначають таким чином:

$$\overline{x}_B=\overline{x}_B'*\Delta x+a, \qquad D_B=D_B'*(\Delta x)^2.$$

Найбільшу частоту ($m_3=50$) має $x_3=20$, тому в якості a приймаємо 20; $\Delta x=5$, тоді $x_i'=(x_i-20)/5$.

Розрахунки виконаємо в таблиці:

x_i	m_i	x_i'	$x_i'*mi$	$(x_i')^2*m_i$
10	6	-2	-12	24
15	16	-1	-16	16
20	50	0	0	0
25	24	1	24	24
30	4	2	8	16
Σ	100		4	80

$$\overline{x_B}' = 4 / 100 = 0{,}04, \qquad D_B'=80 / 100 - (0{,}04)^2=0{,}798.$$

Шукані значення вибіркових характеристик:

$$\overline{x_B} = 0{,}04*5+20=20{,}2;$$

$$D_B = 0{,}798*5^2=19{,}96;$$

$$\sigma_В = \sqrt{19{,}96} = 4{,}47.$$

Завдання 7 варто виконувати після вивчення теми «Елементи регресійного й кореляційного аналізу».

Кореляційна залежність.

Кореляційною залежністю Y від X називають функціональну залежність

$$y_X = \varphi(x). \tag{41}$$

Це рівняння називається рівнянням регресії Y на X, функція $\varphi(x)$ - регресією Y на X.

Коефіцієнт регресії

Кутовий коефіцієнт лінійної регресії Y на X називають коефіцієнтом регресії й позначають ρ_{yx}:

$$y_X = \rho_{yx}x + a_2 . \tag{42}$$

Якщо підбирати параметри ρ_{yx} і a_2 за методом найменших квадратів, то одержимо:

$$\rho_{yx} = a_1= K_{xy}^* / D_x^*; \qquad a_2 = \overline{y} - a_1 \overline{x} \tag{43}$$

або

$$y_x - \overline{y} = \frac{K_{xy}}{D_x}(x - \overline{x}), \tag{44}$$

коефіцієнт кореляції, що визначає тісноту лінійного зв'язку між Y і X:

$$r_{xy} = \rho_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}. \tag{45}$$

Кореляційна таблиця

При кореляційному аналізі складають кореляційну таблицю. У першому рядку вказують значення фактору X, у першому стовпці – значення ознаки Y. У кожній внутрішній клітині вказують число спостережень відповідних ознак, на перетинанні яких розташовано клітину.

Якщо дані спостережень задано в кореляційній таблиці, параметри рівняння лінійної регресії Y на X

$$y_x - \overline{y} = r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}), \tag{46}$$

можна визначити за формулами

$$\overline{x} = \frac{\sum_i n_x x_i}{n}; \qquad \overline{y} = \frac{\sum_k n_y y_k}{n}; \qquad n = \Sigma n_x = \Sigma n_y.; \tag{47}$$

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \frac{\sum_i n_x x_i^2}{n} - (\overline{x})^2; \qquad \sigma_y^2 = \overline{y^2} - (\overline{y})^2 = \frac{\sum_k n_y y_k^2}{n} - (\overline{y})^2; \tag{48}$$

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} * \overline{y}}{\sigma_x \sigma_y}; \qquad \overline{xy} = \frac{\sum_i \sum_k n_{xy} x_i y_k}{n}. \qquad (49)$$

Якщо для зручності обчислень перейти до умовних варіант, то

$$x_i' = \frac{x_i - a_1}{\Delta x}, \qquad y_i' = \frac{y_i - a_2}{\Delta y}, \qquad (50)$$

де Δx, Δy - крок варіювання; a_1, a_2 - варіанти за x і y з найбільшою частотою, то для обчислення параметрів рівняння лінійної регресії з умовними варіантами маємо:

$$\overline{x}' = \frac{\sum_i n_x x_i'}{n}; \qquad \overline{y}' = \frac{\sum_k n_y y_k'}{n}; \qquad n = \Sigma n_x = \Sigma n_y. \qquad (51)$$

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2}' - (\overline{x}')^2 = \frac{\sum_i n_x x_i^{2'}}{n} - (\overline{x}')^2; \qquad \sigma_y^2 = \overline{y^2}' - (\overline{y}')^2 = \frac{\sum_k n_y y_k^{2'}}{n} - (\overline{y}')^2; \qquad (52)$$

$$r_b' = \frac{\overline{x'y'} - \overline{x'} * \overline{y'}}{\sigma_x \sigma_y}; \qquad \overline{x'y'} = \frac{\sum_i \sum_k n_{xy} x'_i \, y'_k}{n}. \qquad (53)$$

Для переходу до дійсних значень застосовують формули

$$\overline{x} = \overline{x'} * \Delta x + a_1, \qquad \overline{y} = \overline{y'} * \Delta y + a_2. \qquad (54)$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_{x'}^2 * (\Delta x)^2; \; \sigma_y^2 = \sigma_{y'}^2 * (\Delta y)^2; \qquad r_b = r_b'. \qquad (55)$$

Приклад 8. Задано кореляційну таблицю розподілу 100 заводів за засобами виробництва в млн. грн. (x) і добове вироблення продукції в тоннах (y). Скласти рівняння лінійної регресії y на x.

Y \ X	50	60	70	80	90	n_y	$\overline{x_y}$
10	2	2				4	55
15	2	4	2			8	60
20		5	7			12	65,83
25		6	12	10	8	36	75,65
30		4	10	10		24	72,5
35			4	6	6	16	81,25
n_x	4	21	35	26	14	100	
$\overline{y_x}$	12,5	21,43	26	29,23	29,28		

Рішення: У якості умовних варіантів приймаємо:

$x_i' = \dfrac{x_i - 70}{10}$; $\quad y_i' = \dfrac{y_i - 25}{5}$, тобто $a_1 = 70$; $a_2 = 25$; $\Delta x = 10$; $\Delta y = 5$.

x_i' / y_k'	-2	-1	0	1	2	n_y	$n_y y'$	$n_y y'^2$	$n_{xy}x'y'$	
-3	6 2	3 2				4	-12	36	18	
-2	4 2	2 4	0 2			8	-16	32	16	
-1		1 5	0 7			12	-12	12	5	
0		0 6	0 12	0 10	0 8	36	0	0	0	
1		-1 4	0 10	1 10		24	24	24	6	
2			0 4	2 6	4 6	16	32	64	36	
n_x	4	21	35	26	14	100				
$n_x x'$	-8	-21	0	26	28					Σ=25
$n_x x'^2$	16	21	0	26	56					Σ=119
$n_{xy}x'y'$	20	15	0	22	24					Σ=81
							Σ= 16	Σ= 168	Σ= 81	

$\overline{x'} = 25/100 = 0,25$; $\overline{y'} = 16/100 = 0,16$; $\sigma_{x'}^2 = 119/100 - (0,25)^2 = 1,128$;
$\sigma_{y'}^2 = 168/100 - (0,16)^2 = 1,424$;$= 112.75$; $(x = 0,25*10+70 = 72,5$;
$\overline{y} = 0,16*5+25 = 25,8$; $\sigma_x^2 = 1,128*10^2 = 112,8$; $\sigma_y^2 = 1,424*5^2 = 35,6$
$r_b' = r_b = (0,81-0,25*0,16)/(\sqrt{1,28} * \sqrt{1,424}) = 0,608.$

Шукане рівняння:

$$\overline{y}_x - 25,8 = 0,608 * (x-72,5) *5,97/10,618;$$

$$\overline{y}_x = 0,342x + 1,03.$$

Необхідно зробити перевірку відповідності рівняння регресії значенням, отриманим із спостережень:

нехай $x = 60$, тоді

$$y_{x=60} = (2*10+4*15+5*20+6*25+4*30)/21 = 21,428,$$

з рівняння регресії

$y_{x=60} = 0,342*60 + 1,03 = 21,55$; помилка становить 0,122;

нехай $x=80$, тоді

$$y_{x=80} = (25*10+10*30+6*35)/26 = 29,3,$$

з рівняння регресії

$y_{x=80} = 0,342 * 80 + 1,03 = 28,39$; помилка становить 0,84.

ВАРІАНТИ КОНТРОЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Завдання 1.

1. Вироби виготовляє два підприємства. У магазин надходить 60% виробів з першого підприємства й 40% - з другого. Перше підприємство виготовляє 90% виробів без браку й 10% бракованих, а друге - 80% виробів без браку й 20% - бракованих. Знайти ймовірність того, що навмання куплений виріб виявиться: а) без браку; б) бракованим.
2. На склад надходить продукція трьох фабрик. Продукція першої фабрики становить 25%, другої-40%, третьої - 35%. Відомо також, що ймовірність браку для першої фабрики - 4%, для другої - 1% і для третьої -3%. Знайти ймовірність того, що обраний навмання виріб: а) стандартний; б) бракований і вироблений на першій фабриці.
3. Булки, які випікає хлібозавод, мають такий розподіл за вагою: менше 90 г - 5%, більше 110 г - 10%, інші 85% булок мають нормальну масу (90....110 г). З досить великої партії беруть навмання дві булки. Знайти ймовірність того, що: а) обидві булки мають нормальну масу; б) одна булка має масу менше норми, а інша - більше.
4. Працюють три пристрої. Імовірність того, що протягом одного дня перший пристрій відмовить - 0,3, другий - 0,6, третій - 0,1. Знайти ймовірність того, що протягом одного дня відмовлять: а) всі пристрої; б) будь-який один; в) принаймні, один пристрій.
5. На столі в певному порядку лежать 32 екзаменаційних квитка. Знайти ймовірність того, що номер взятого навмання квитка буде числом, кратним 5 або 2.
6. Чотири студенти здають іспит. Імовірність того, що перший студент здасть іспит, дорівнює 0,95, другий - 0,9, третій - 0,85, а четвертий - 0,8. Знайти ймовірність того, що: а) хоча б два студенти здадуть іспит; б) всі чотири студенти здадуть іспит.
7. Достатня умова здачі колоквіуму - відповідь на одне з двох питань, що пропонує викладач студентові. Студент не знає відповідей на десять питань із сорока, які можуть бути запропоновані. Знайти ймовірність здачі колоквіуму.
8. Є дві партії виробів по 12 і 10 штук, причому в кожній партії один виріб бракований. Виріб, взятий навмання з першої партії, перекладено в другу, після чого вибирають навмання виріб з другої партії. Визначити ймовірність виймання бракованого виробу із другої партії.
9. Для контролю продукції із трьох партій деталей взята для випробування одна деталь. Яка ймовірність виявлення браку, якщо в одній партії 2/3 деталей браковані, а у двох інших - усі доброякісні?
10. У ящику перебувають 15 тенісних м'ячів, з яких 9 нових. Для першої гри навмання беруть три м'ячі, які після гри повертають в ящик. Для

другої гри також навмання беруться три м'ячі. Знайти ймовірність того, що всі м'ячі, взяті для другої гри, нові.

11. У тирі є п'ять рушниць, ймовірності влучення з яких рівні відповідно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 і 0,9. Визначити ймовірність влучення при одному пострілі, якщо стріляючий бере одну з рушниць навмання.
12. Є десять однакових урн, з яких в дев'яти перебувають по дві чорних і по дві білих кулі, а в одній - п'ять білих і одна чорна куля. З урни, узятої навмання, витягнута біла куля. Яка ймовірність, що цю кулю витягнули з тієї урни, що містить п'ять білих куль?
13. Два стрільця, для яких ймовірності влучення в мішень рівні відповідно 0,7 і 0,8, роблять по одному пострілу. Визначити ймовірність хоча б одного влучення в мішень.
14. Ймовірність настання події в кожному досліді однакова й дорівнює 0,2. Досліди проводять один за одним до настання події. Визначити ймовірність того, що прийдеться робити четвертий дослід.
15. В урні 10 червоних і 6 чорних куль. З урни виймають одну за одною три кулі. Знайти ймовірність того, що серед них буде не більш однієї червоної.

Завдання 2.

Закон розподілу випадкової величини X заданий таблицею (перший рядок - можливі значення *X*, другий - відповідні їм значення ймовірностей). Знайти: а) математичне сподівання; б) дисперсію; в) середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

№ варіанта						
1	x_i	10	12	20	25	30
	p_i	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4
2	x_i	8	12	18	24	30
	p_i	0,3	0,1	0,3	0,2	0,1
3	x_i	30	40	50	60	70
	p_i	0,5	0,1	0,2	0,1	0,1
4	x_i	21	25	32	40	50
	p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2
5	x_i	10	12	16	18	20
	p_i	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1
6	x_i	11	15	20	25	30
	p_i	0,4	0,1	0,3	0,1	0,1
7	x_i	12	16	21	26	30
	p_i	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Продовження таблиці

№ варіанта						
8	x_i	13	17	20	27	30
	p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1
9	x_i	14	18	23	28	30
	p_i	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1
10	x_i	15	19	24	29	30
	p_i	0,1	0,2	0,2	0,1	0,4
11	x_i	13	17	20	27	30
	p_i	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1
12	x_i	14	18	23	28	30
	p_i	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1
13	x_i	13	17	20	27	30
	p_i	0,4	0,1	0,3	0,1	0,1
14	x_i	10	12	16	18	20
	p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2
15	x_i	8	12	18	24	30
	p_i	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4

Завдання 3.

Випадкова величина X задана інтегральною функцією (функцією розподілу $F(x)$). Знайти: а) диференціальну функцію розподілу (щільність ймовірностей); б) математичне сподівання й дисперсію X; в) побудувати графіки інтегральної й диференціальної функцій.

1. $F(x)=\begin{cases}0, x\le 2,\\ \frac{1}{9}(x-2)^2, 2\le x\le 5,\\ 1, x>5.\end{cases}$ **2.** $F(x)=\begin{cases}0, x\le 1,\\ \frac{1}{4}(x-1)^2, 1\le x\le 3,\\ 1, x>3.\end{cases}$ **3.** $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 5,\\ \frac{1}{6}(x-1)^2, & 5\le x\le 6,\\ 1, & x>6.\end{cases}$

4. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3,\\ \frac{1}{4}(x-3)^2, & 3\le x\le 5,\\ 1, & x>5.\end{cases}$ **5.** $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \frac{1}{9}(x-1)^2, & 1\le x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$ **6.** $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3,\\ \frac{1}{9}(x-1)^2, & 3\le x\le 6,\\ 1, & x>6.\end{cases}$

7. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{1}{25}x^2, & 0<x\le 5,\\ 1, & x>5.\end{cases}$ **8.** $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ \frac{1}{6}(x-2)^2, & 2\le x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$ **9.** $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3,\\ \frac{1}{6}(x-2)^2, & 3\le x\le 6,\\ 1, & x>6.\end{cases}$

10. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 6,\\ (x-6)^2, & 6\le x\le 7,\\ 1, & x>7.\end{cases}$ **11.** $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 8,\\ (x-8)^2, & 8< x\le 9,\\ 1, & x>9.\end{cases}$ **12.** $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 5,\\ (x-8)^2, & 5< x\le 8,\\ 1, & x>8.\end{cases}$

13. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3,\\ \frac{1}{25}(x-3)^2, & 3< x\le 8,\\ 1, & x>8.\end{cases}$ **14.** $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ \frac{1}{16}(x-2)^2, & 2\le x\le 6,\\ 1, & x>6.\end{cases}$ · **15.** $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ \frac{1}{16}(x-2)^2, & 2\le x\le 6,\\ 1, & x>6.\end{cases}$

Завдання 4.

Задано математичне сподівання m і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що X прийме значення, що належить інтервалу $(\alpha,\ \beta)$, і ймовірність того, що абсолютна величина відхилення x-m буде менше ε.

варіант	m	σ	α	β	ε
1	15	2	9	19	3
2	14	4	10	20	4
3	13	4	10	21	2
4	9	3	9	18	5
5	8	4	8	12	8
6	12	5	12	22	10
7	11	4	13	23	6
8	10	8	14	18	2
9	7	2	6	10	1
10	6	2	4	12	0,5
11	3	0,3	1,5	2,5	0,25
12	5	0,2	4	5	0,2
13	11	1	10	11	2
14	4	0,5	3	3,5	2
15	12	1,1	11	12	3

Завдання 5.

Випадкова величина X нормально розподілена_з відомим середнім квадратичним відхиленням σ, вибірковою середньою $\bar{x}_B$, обсягом вибірки n. Знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання m з довірчою ймовірністю β.

варіант	$\overline{x_B}$	σ	n	β
1	0	0,5	35	0,99
2	10	9,2	30	0,95
3	20	8,2	80	0,9
4	75	1,2	160	0,99
5	8	6,5	20	0,95
6	8	0,9	100	0,9
7	95	8,9	130	0,99
8	13	0,5	170	0,95
9	18	4,5	40	0,9
10	19	3,6	96	0,9
11	35	5	100	0,9
12	50	0,5	120	0,95
13	25	1,5	250	0,95
14	75	6	250	0,9
15	100	5	250	0,9

Завдання 6.

По заданому статистичному розподілу вибірки знайти:

а) вибіркову середню $\overline{x_B}$;

б) вибіркову дисперсію D_B;

в) вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_B.

Номер варіанта						
1	x_i	10	12	20	25	30
	n_i	5	18	11	1	9
2	x_i	8	12	18	24	30
	n_i	2	20	7	1	5
3	x_i	30	40	50	60	70
	n_i	1	11	3	1	17
4	x_i	21	25	32	40	50
	n_i	8	8	13	2	18
5	x_i	10	12	16	18	20
	n_i	18	3	11	14	19
6	x_i	11	15	20	25	30
	n_i	19	5	18	8	20
7	x_i	12	16	21	26	30
	n_i	17	20	1	8	2
8	x_i	13	17	20	27	30
	n_i	7	9	1	12	1
9	x_i	14	18	23	28	30
	n_i	15	18	6	13	13
10	x_i	15	19	24	29	30
	n_i	13	17	6	4	9

Продовження таблиці

11	x_i	35	44	64	69	78
	n_i	10	12	8	14	7
12	x_i	8	9	12	13	15
	n_i	5	4	8	3	11
13	x_i	156	165	185	190	200
	n_i	7	12	10	2	4
14	x_i	218	260	270	290	318
	n_i	13	17	6	4	9
15	x_i	51	59	65	78	88
	n_i	3	6	9	7	3

Завдання 7.

Знайти рівняння лінійної регресії y на x, $y_x - \overline{y} = r_b \dfrac{\delta_y}{\delta_x}(x - \overline{x})$. Дані спостережень наведені в кореляційній таблиці.

Варіант 1

X Y	4	9	14	19	24	29	
10	2	3					5
20		7	3				10
30			2	50	2		54
40			1	10	6		17
50				4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	100

Варіант 2

X Y	10	15	20	25	30	35	n_y
30	2	6					8
40		4	4				8
50			7	35	8		50
60			2	10	8		20
70				5	6	3	14
n_x	2	10	13	50	22	3	100

Варіант 3

X Y	15	20	25	30	35	40	n_y
5	4	2					6
10		6	4				10
15			6	45	2		53
20			2	8	6		16
25				4	7	4	15
n_x	4	8	12	57	15	4	100

Варіант 4

X Y	5	10	15	20	25	30	n_y
20	1	5					6
30		5	3				8
40			9	40	2		51
50			4	11	6		21
60				4	7	3	14
n_x	1	10	12	55	15	3	100

Варіант 5

X Y	10	15	20	25	30	35	n_y
6	4	2					6
12		6	2				8
18			5	40	5		50
24			2	8	7		17
30				4	7	8	19
n_x	4	8	9	52	19	8	100

Варіант 6

X Y	5	10	15	20	25	30	n_y
8	2	4					6
12		3	7				10
16			5	30	10		45
20			7	10	8		25
24				5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	100

Варіант 7

X Y	2	7	12	17	22	27	n_y
10	2	4					6
20		6	2				8
30			3	50	2		55
40			1	10	6		17
50				4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	100

Варіант 8

X Y	11	16	21	26	31	36	n_y
25	2	4					6
35		6	3				9
45			6	45	4		55
55			2	8	6		16
65				4	7	3	14
n_x	2	10	11	57	17	3	100

Варіант 9

X Y	4	9	14	19	24	29	n_y
8	3	3					6
18		5	4				9
28			40	2	8		50
38			5	10	6		21
48				4	7	3	14
n_x	3	8	49	16	21	3	100

Варіант 10

X Y	5	10	15	20	25	30	n_y
11	4	2					6
21		5	3				8
31			5	45	5		55
41			2	8	7		17
51				4	7	3	14
n_x	4	7	10	57	19	3	100

Варіант 11

X Y	15	20	25	30	35	40	n_y
5	4	3					7
10		5	4				9
15			6	43	2		51
20			2	10	6		18
25				4	7	4	15
n_x	4	8	12	57	15	4	100

Варіант 12

X Y	5	10	15	20	25	30	n_y
8	2	4					6
12		3	8				11
16			5	30	10		45
20			6	10	8		24
24				5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	100

Варіант 13

X Y	10	15	20	25	30	35	n_y
6	4	2					6
12		6	2				8
18			5	40	5		50
24			2	8	7		17
30				4	7	8	19
n_x	4	8	9	52	19	8	100

Варіант 14

X Y	11	16	21	26	31	36	n_y
25	2	4					6
35		6	3				9
45			6	45	4		55
55			2	8	6		16
65				4	7	3	14
n_x	2	10	11	57	17	3	100

Варіант 15

X Y	2	7	12	17	22	27	n_y
10	2	4					6
20		6	2				8
30			3	50	2		55
40			1	10	6		17
50				4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	100

Список літератури

1. Гмурман В. Э. Теория вероятностей и математическая статистика. -М.: Высш. школа, 1977. - 498 с.
2. Гмурман В.Э. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высш. школа, 1975. - 330с.
3. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. - М.: Высш. школа, 1999.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей.- Физматгиз, 1961.
5. Вентцель Е. С., Овчаров Л.А. Сборник задач по теории вероятностей. - М.: Наука, 1969.
6. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций./ Под ред. А.А.Свешникова.- Наука, 1970.

Додаток 1

Таблиця значень функції $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0008	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2

Таблиця значень функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

X	*Ф(x)*	*X*	*Ф(x)*	*X*	*Ф(x)*	*X*	*Ф(x)*
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0.46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2818	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1.21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0.27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

Продовження додатка 2

x	*Ф(x)*	*X*	*Ф(x)*	*X*	*Ф(x)*	*X*	*Ф(x)*
1,26	0,3926	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2.28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1.91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Додаток 3

Таблиця значень імовірності P{$\chi^2 > \chi^2_P$ }

χ^2_P	*k*							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,3173	0,6065	0,8013	0,9098	0,9626	0,9856	0,9948	0,9982
2	1574	3679	5724	7358	8491	9197	9598	9810
3	0833	2231	3916	5578	7000	8088	8850	9344
4	0455	1353	2615	4060	5494	6767	7798	8571
5	0254	0821	1718	2873	4159	5438	6600	7576
6	0143	0498	1116	1991	3062	4232	5398	6472
7	0081	0302	0719	1359	2206	3208	4289	5366
8	0047	0183	0460	0916	1562	2381	3326	4335
9	0027	0111	0293	0611	1091	1736	2527	3423
10	0016	0067	0186	0404	0752	1247	1886	2650
11	0009	0041	0117	0266	0514	0884	1386	2017
12	0005	0025	0074	0174	0348	0620	1006	1512
13	0003	0015	0046	0113	0234	0430	0721	1119
14	0002	0009	0029	0073	0146	0296	0512	0818
15	0001	0006	0018	0047	0104	0203	0360	0591
16	0001	0003	0011	0030	0068	0138	0251	0424
17	0000	0002	0007	0019	0045	0093	0174	0301
18		0001	0004	0012	0029	0062	0120	0212
19		0001	0003	0008	0019	0042	0082	0149
20		0000	0002	0005	0013	0028	0056	0103
21		0000	0001	0003	0008	0018	0038	0071
22		0000	0001	0002	0005	0012	0025	0049
23		0000	0000	0001	0003	0008	0017	0034
24		0000	0000	0001	0002	0005	0011	0023
25		0000	0000	0001	0001	0003	0008	0016
26		0000	0000	0000	0001	0002	0005	0010
27		0000	0000	0000	0001	0001	0003	0007
28		0000	0000	0000	0000	0001	0002	0005
29		0000	0000	0000	0000	0001	0001	0003
30		0000	0000	0000	0000	0000	0001	0002

Додаток 4

Значення критерію Фішера при (β= 0,95)

n(m-1)	n-s							
	1	2	4	6	8	12	24	
3	10,13	9,55	9,12	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
6	5,99	5,14	4,53	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
10	4,96	4,10	3,48	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
15	4,54	3,68	3,06	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
20	4,35	3,49	2,87	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
30	4,17	3,32	2,69	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
120	3,92	3,07	2,45	2,17	2,02	1,83	1,61	1,25
∞	3,84	2,99	2,37	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

ЗМІСТ

Навчальне видання

Методичні вказівки для виконання контрольної роботи з курсу **«Теорія ймовірностей і математична статистика»** (для студентів 2 курсу ФПО та ЗН та слухачів другої вищої освіти напряму підготовки 0921 (6.060101) «Будівництво» спеціальності «Теплогазопостачання і вентиляція»).

Укладачі: ст. викл. Воронкова Тетяна Борисівна,
доц. Охріменко Вячеслав Миколайович

Відповідальний за випуск *А. І. Кузнєцов*

Редактор *М. З. Аляб'єв*

Коректор *З. І. Зайцева*

План 2007, поз. 97

Підп. до друку 20.11.07 Формат 60x84 1/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 1,9
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 731 від 19.12.2001